Теория представлений симметрических групп

Лекция 16. Мера Планшереля

Н. В. Цилевич

17 декабря 2021 г.

Мера Планшереля конечных групп

- Мера Планшереля конечной группы G – мера P на $\hat{G}$:
  $\boxed{P(\pi) = \dfrac{\dim^2 \pi}{|G|}}$, $\pi \in \hat{G}$.
- В частности, мера Планшереля симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ – мера на $\mathbb{Y}_n$: $\boxed{P(\lambda) = \dfrac{\dim^2 \lambda}{n!}}$.

Мера Планшереля конечных групп

- Мера Планшереля конечной группы G – мера P на $\hat{G}$:
  $$\boxed{P(\pi) = \frac{\dim^2 \pi}{|G|}}, \ \pi \in \hat{G}.$$
- В частности, мера Планшереля симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ – мера на $\mathbb{Y}_n$: $\boxed{P(\lambda) = \dfrac{\dim^2 \lambda}{n!}}$.
- Алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута RSK – биекция $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \leftrightarrow (P, Q)$, где P, Q – таблицы одинаковой формы $\lambda \vdash n$, P полустандартна, Q стандартна.
- Таким образом, RSK переводит равномерную меру (меру Хаара) на $\mathfrak{S}_n$ в меру Планшереля на $\mathbb{Y}_n$.

Мера Планшереля локально конечных групп

- Индуктивная цепочка $G_0 \subset G_1 \subset \dots \rightsquigarrow$
  - локально конечная группа $G_\infty = \varinjlim G_n$;
  - диаграмма Браттели Γ (с функцией кратности $\varkappa$).

Мера Планшереля локально конечных групп

- Индуктивная цепочка $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \rightsquigarrow$
  - локально конечная группа $G_\infty = \varinjlim G_n$;
  - диаграмма Браттели Γ (с функцией кратности $\varkappa$).
- Мера Планшереля $\mathcal{P}$ для G_∞ – мера на $\mathbb{T}(\Gamma)$ с переходными вероятностями

$$p(\lambda, \Lambda) = \frac{|G_n|}{|G_{n+1}|} \frac{\varkappa(\lambda, \Lambda) \dim \pi_\Lambda}{\dim \pi_\lambda}, \qquad \lambda \in \hat{G}_n,\ \Lambda \in \hat{G}_{n+1}.$$

Мера Планшереля локально конечных групп

- Индуктивная цепочка $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \rightsquigarrow$
  - локально конечная группа $G_\infty = \varinjlim G_n$;
  - диаграмма Браттели Γ (с функцией кратности $\varkappa$).
- Мера Планшереля $\mathcal{P}$ для G_∞ – мера на $\mathbb{T}(\Gamma)$ с переходными вероятностями

$$p(\lambda, \Lambda) = \frac{|G_n|}{|G_{n+1}|} \frac{\varkappa(\lambda, \Lambda) \dim \pi_\Lambda}{\dim \pi_\lambda}, \qquad \lambda \in \hat{G}_n,\ \Lambda \in \hat{G}_{n+1}.$$

Доказательство корректности:

- $\mathrm{Ind}_{G_n}^{G_{n+1}} \pi_\lambda = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \varkappa(\lambda, \Lambda) \pi_\Lambda$;
- считаем размерности $\Longrightarrow \frac{|G_{n+1}|}{|G_n|} \dim \pi_\lambda = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \varkappa(\lambda, \Lambda) \dim \pi_\Lambda$

$$\Longrightarrow \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} p(\lambda, \Lambda) = 1.$$

Цилиндрические распределения

- Для меры M на $\mathbb{T}(\Gamma)$ цилиндрическое распределение $M_n(\lambda) := M(\{t \in \mathbb{T}(\Gamma)\colon t \text{ проходит через } \lambda\})$, $\lambda \in \hat{G}_n$.

Цилиндрические распределения

- Для меры M на $\mathbb{T}(\Gamma)$ цилиндрическое распределение $M_n(\lambda) := M(\{t \in \mathbb{T}(\Gamma) \colon t$ проходит через $\lambda\})$, $\lambda \in \hat{G}_n$.

Лемма

Цилиндрические распределения меры Планшереля $\mathcal{P}$ на $\mathbb{T}(\Gamma)$ совпадают с мерами Планшереля групп G_n.

Цилиндрические распределения

- Для меры M на $\mathbb{T}(\Gamma)$ цилиндрическое распределение $M_n(\lambda) := M(\{t \in \mathbb{T}(\Gamma)\colon t \text{ проходит через } \lambda\})$, $\lambda \in \hat{G}_n$.

Лемма

Цилиндрические распределения меры Планшереля $\mathcal{P}$ на $\mathbb{T}(\Gamma)$ совпадают с мерами Планшереля групп G_n.

Доказательство: индукция по n.

- База $n = 1$ очевидна.
- Переход $n \mapsto n+1$:

$$\mathcal{P}_{n+1}(\Lambda) = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} \mathcal{P}_n(\lambda) p(\lambda,\Lambda) = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} \frac{\dim^2 \pi_\lambda}{|G_n|} \frac{|G_n|}{|G_{n+1}|} \frac{\varkappa(\lambda,\Lambda)\dim \pi_\Lambda}{\dim \pi_\lambda} =$$

$$= \frac{\dim \pi_\Lambda}{|G_{n+1}|} \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} \dim \pi_\lambda \varkappa(\lambda,\Lambda) = \frac{\dim^2 \pi_\Lambda}{|G_{n+1}|}.$$

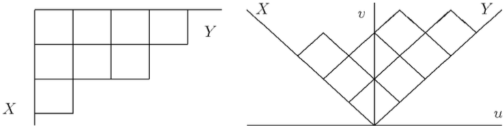
Мера Планшереля бесконечной симметрической группы

- Мера Планшереля для $\mathfrak{S}_\infty$ – мера $\mathcal{P}$ на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ с переходными вероятностями
$$\boxed{p(\lambda, \Lambda) = \frac{\dim \Lambda}{(n+1)\dim \lambda}}.$$
- Это центральная мера: $\mathcal{P}_n(u) = \frac{\dim \lambda}{n!}$ для $u \in \lambda \vdash n$.
- Это эргодическая центральная мера, соответствующая параметрам Тома $\alpha = \beta = 0$ (нулевым частотам).

Что можно сказать про вид большой случайной диаграммы Юнга, распределённой по мере Планшереля?

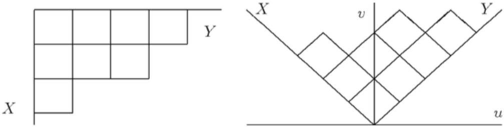
Предельная форма планшерелевских диаграмм

- Повернём диаграмму:

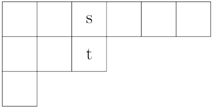


Предельная форма планшерелевских диаграмм

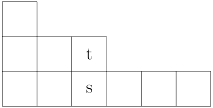
- Повернём диаграмму:



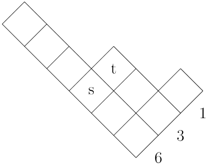
Способы изображения диаграмм Юнга:



английский



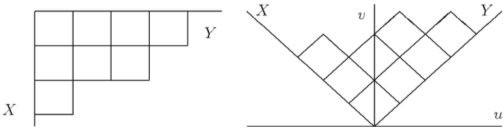
французский



русский

Предельная форма планшерелевских диаграмм

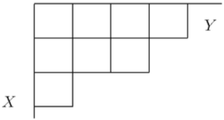
- Повернём диаграмму:

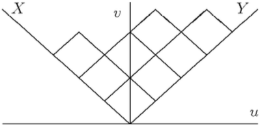


- Теперь диаграмма Юнга = непрерывная кусочно-линейная функция $\omega(u)$:
  - $\omega'(u) = \pm 1$;
  - $\omega(u) = |u|$ для достаточно больших $|u|$;
  - минимумы $x_1, \ldots, x_d$ и максимумы $y_1, \ldots, y_d$ – целые числа.
- **Пример:** для одноклеточной диаграммы $\omega(u) = \max\{|u|, 2 - |u|\}$.

Предельная форма планшерелевских диаграмм

- Повернём диаграмму:





- Теперь диаграмма Юнга = непрерывная кусочно-линейная функция $\omega(u)$:
  - $\omega'(u) = \pm 1$;
  - $\omega(u) = |u|$ для достаточно больших $|u|$;
  - минимумы $x_1, \ldots, x_d$ и максимумы $y_1, \ldots, y_d$ – целые числа.
- **Пример:** для одноклеточной диаграммы $\omega(u) = \max\{|u|, 2 - |u|\}$.
- ($\star$) Площадь (= число клеток) диаграммы =

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega(u) - |u|)\,du = \sum_{i<j}(y_i - x_i)(x_j - y_{j-1}).$$

Предельная форма планшерелевских диаграмм

- Чтобы получить разумный предел, нужно делить площадь диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ на n, т.е. нормировать на $\sqrt{n}$ по каждой оси.

Предельная форма планшерелевских диаграмм

- Чтобы получить разумный предел, нужно делить площадь диаграммы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ на n, т.е. нормировать на $\sqrt{n}$ по каждой оси.

Теорема

Для п.в. по мере Планшереля бесконечных таблиц Юнга $t = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ существует равномерный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n(u\sqrt{n}) = \Omega(u),$$

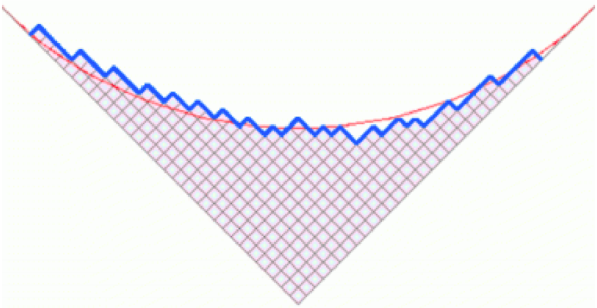
где

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если} \quad |u| \le 2, \\ |u|, & \text{если} \quad |u| \ge 2, \end{cases}$$

– *кривая Вершика–Керова–Логана–Шеппа.*

- $\Omega'(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2}$.

Кривая Ω



$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}\right), & \text{если} \quad |u| \le 2, \\ |u|, & \text{если} \quad |u| \ge 2. \end{cases}$$

Максимальная размерность диаграмм Юнга

- Вопрос: какова асимптотически максимальная размерность $\dim \Lambda$ при $\Lambda \in \mathbb{Y}_N$ (т.е. максимальная размерность неприводимого представления $\mathfrak{S}_N$)?
- Теорема Бернсайда $\implies \dim \Lambda < \sqrt{N!}$.
- Были гипотезы, что $\dim \Lambda$ может быть "почти" $\sqrt{N!}$ (отличаться в полиномиальное число раз).

Максимальная размерность диаграмм Юнга

- Вопрос: какова асимптотически максимальная размерность $\dim \Lambda$ при $\Lambda \in \mathbb{Y}_N$ (т.е. максимальная размерность неприводимого представления $\mathfrak{S}_N$)?
- Теорема Бернсайда $\implies \dim \Lambda < \sqrt{N!}$.
- Были гипотезы, что $\dim \Lambda$ может быть "почти" $\sqrt{N!}$ (отличаться в полиномиальное число раз). Нет!

Теорема

Существуют такие константы c_0 и c_1, что

$$e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!} \leq \max_{\Lambda \in \mathbb{Y}_N} \dim \Lambda \leq e^{-\frac{c_2}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!}.$$

Максимальная размерность диаграмм Юнга

- Вопрос: какова асимптотически максимальная размерность $\dim\Lambda$ при $\Lambda \in \mathbb{Y}_N$ (т.е. максимальная размерность неприводимого представления $\mathfrak{S}_N$)?
- Теорема Бернсайда $\implies \dim\Lambda < \sqrt{N!}$.
- Были гипотезы, что $\dim\Lambda$ может быть "почти" $\sqrt{N!}$ (отличаться в полиномиальное число раз). Нет!

Теорема

Существуют такие константы c_0 и c_1, что

$$e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!} \le \max_{\Lambda\in\mathbb{Y}_N} \dim\Lambda \le e^{-\frac{c_2}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!}.$$

А что можно сказать про размерность типичных по мере Планшереля диаграмм? Логично предположить, что она будет меньше?

Максимальная размерность диаграмм Юнга

Теорема

Существуют такие константы c_0 и c_1, что

$$e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!} \le \max_{\Lambda\in\mathbb{Y}_N} \dim\Lambda \le e^{-\frac{c_2}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!}.$$

А что можно сказать про размерность типичных по мере Планшереля диаграмм? Логично предположить, что она будет меньше? Нет! Порядок тот же!

Максимальная размерность диаграмм Юнга

Теорема

Существуют такие константы c_0 *и* c_1, *что*

$$e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!} \le \max_{\Lambda\in\mathbb{Y}_N} \dim\Lambda \le e^{-\frac{c_2}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!}.$$

Теорема

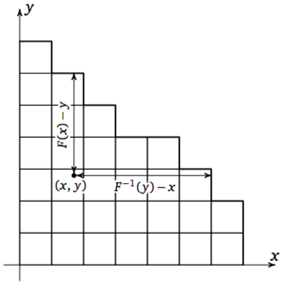
Существуют такие константы c_0', c_1', *что*

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{P}_N \left\{\Lambda :\ c_0' < -\frac{2}{\sqrt{N}} \ln \frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}} < c_1' \right\} = 1.$$

Идея доказательства: интеграл крюков

- Формула крюков $\implies \mathcal{P}_N(\Lambda) = \frac{N!}{\prod\limits_{\square\in\Lambda} h^2(\square)}$.
- Формула Стирлинга $\implies N! = \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N(1 + O(\frac{1}{N}))$.
- Тогда $-\frac{\ln \mathcal{P}_n(\Lambda)}{N} = \big(1 + \frac{2}{N}\sum\limits_{\square\in\Lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\big) + O(\frac{\ln N}{N})$ $(*)$. Похоже на интегральную сумму...

- Формула крюков $\implies \mathcal{P}_N(\Lambda) = \frac{N!}{\prod\limits_{\square\in\Lambda} h^2(\square)}$.
- Формула Стирлинга $\implies N! = \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N(1 + O(\frac{1}{N}))$.
- Тогда $-\frac{\ln \mathcal{P}_n(\Lambda)}{N} = \left(1 + \frac{2}{N}\sum\limits_{\square\in\Lambda} \ln\frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\right) + O(\frac{\ln N}{N})$ $(*)$. Похоже на интегральную сумму...
- F – невозрастающая на $[0,+\infty) \rightsquigarrow F^{-1}(y) := \inf\{x\colon F(x) \le y\} \rightsquigarrow$ $\boxed{h_F(x,y) := F(x) + F^{-1}(y) - x - y}$ – крюк F в точке (x, y).



Идея доказательства: интеграл крюков

- Формула крюков $\implies \mathcal{P}_N(\Lambda) = \frac{N!}{\prod\limits_{\square\in\Lambda} h^2(\square)}$.
- Формула Стирлинга $\implies N! = \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N(1 + O(\frac{1}{N}))$.
- Тогда $-\frac{\ln \mathcal{P}_n(\Lambda)}{N} = \left(1 + \frac{2}{N} \sum\limits_{\square\in\Lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\right) + O(\frac{\ln N}{N})$ $(*)$. Похоже на интегральную сумму...
- F – невозрастающая на $[0, +\infty)$ $\rightsquigarrow$ $F^{-1}(y) := \inf\{x \colon F(x) \le y\}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{h_F(x,y) := F(x) + F^{-1}(y) - x - y}$ – крюк F в точке (x, y).
- Интеграл крюков $\boxed{\theta(F) := 1 + 2 \iint\limits_{\Lambda} \ln h_F(x,y)\, dxdy}$.

Идея доказательства: интеграл крюков

- Формула крюков $\Longrightarrow$ $\mathcal{P}_N(\Lambda) = \frac{N!}{\prod\limits_{\square\in\Lambda} h^2(\square)}$.
- Формула Стирлинга $\Longrightarrow$ $N! = \sqrt{2\pi N}(\frac{N}{e})^N(1 + O(\frac{1}{N}))$.
- Тогда $-\frac{\ln \mathcal{P}_n(\Lambda)}{N} = \left(1 + \frac{2}{N}\sum\limits_{\square\in\Lambda} \ln \frac{h(\square)}{\sqrt{N}}\right) + O(\frac{\ln N}{N})$ $(*)$. Похоже на интегральную сумму...
- F – невозрастающая на $[0, +\infty)$ $\rightsquigarrow$ $F^{-1}(y) := \inf\{x \colon F(x) \leq y\}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{h_F(x, y) := F(x) + F^{-1}(y) - x - y}$ – крюк F в точке (x, y).
- Интеграл крюков $\boxed{\theta(F) := 1 + 2 \iint\limits_{\Lambda} \ln h_F(x, y)\, dxdy}$.
- Сумма в $(*)$ – интегральная сумма для него.

Идея доказательства: вариационная задача

- Повернём диаграмму на 45° (русская запись) и сожмём в $\sqrt{2}$ раз: $x = \frac{1}{2}(x' - y')$, $y = \frac{1}{2}(x' + y')$.
- Интеграл крюков:

$$\tilde{\theta}(L) = 1 + 2 \iint_{t<s} \ln 2(s-t)(1 - L'(s))(1 + L'(t)).$$

- Площадь диаграммы:

$$S(L) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (L(u) - |u|)\, du.$$

- Класс функций $\mathcal{L}$:
  - L – 1-липшицева, т.е. $|L(u) - L(t)| \le |u - t|$;
  - $L(u) \ge |u|$ и $L(u) = |u|$ для достаточно больших $|u|$.
- Задача: найти $\min\limits_L \tilde{\theta}(L)$ при условиях $L \in \mathcal{L}$, $S(L) = \frac{1}{2}$.
- Ответ: минимайзер – кривая Ω.

Задача Улама

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.

Задача Улама

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.
- **Пример.** $w = 46153782 \implies L(w) = 4$.

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.
- **Пример.** $w = 46153782 \implies L(w) = 4$.
- Среднее значение $\ell_n := \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} L_n(w)$.

Задача Улама: найти асимптотику ℓ_n при $n \to \infty$.

Переформулировка в терминах меры Планшереля

- $w \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{RSK}(w) = (P, Q)$, где (P, Q) – таблицы одинаковой формы λ, которую назовём формой w.

Теорема (Шенстед)

Если w – перестановка формы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, то $\lambda_1 = L(w)$.

- Тем самым задача Улама сводится к задаче о распределении длины первой строки растущей диаграммы Юнга относительно меры Планшереля.

Теорема

x – последовательность независимых величин с общим непрерывным распределением $\implies$ *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{x\colon \ \left|\frac{L_n(x)}{\sqrt{n}} - 2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема

x – последовательность независимых величин с общим непрерывным распределением $\implies$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{x\colon \ \left|\frac{L_n(x)}{\sqrt{n}} - 2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

- В частности,

$$\boxed{\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \to 2 \text{ при } n \to \infty}.$$

Теорема

x – последовательность независимых величин с общим непрерывным распределением $\Longrightarrow$ *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{x\colon \left|\frac{L_n(x)}{\sqrt{n}} - 2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

- В частности,

$$\boxed{\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \to 2 \text{ при } n \to \infty}.$$

- Уточнение (Баик–Дейфт–Йохансcон 1998):

$$\boxed{\ell_n = 2\sqrt{n} + cn^{-\frac{1}{6}} + o(n^{-\frac{1}{6}})},$$

где $c = -1.77108\ldots$ – константа, связанная с решением т.н. уравнения Пенлеве II.