Условная Колмогоровская сл-ть.

(x, y)

D - декомпрессор

$$K_D(x|y) = \min\{|p| \mid D(p,y) = x\}$$

D_1 не хуже, чем $D_2 \iff \exists C > 0$:

$\forall x, y \quad K_{D_1}(x|y) \le K_{D_2}(x|y) + C$.

<u>Теорема</u> $\exists$ оптим. условный декомпрессор

$$U(\hat{p}x, y) = \langle p\rangle(x,y)$$

Св-ва условной колм. сл-ти

---

1) $KS(x|y) \le KS(x) + O(1)$ $\quad D'(x,y) = y$

2) $KS(x|x) = O(1)$

3) $KS(\underline{f(x,y)}\,|y) \le KS(x|y) + O(1)$

f - выч. ф-ция всюду опр.

$D(p,y) = x$

$D'(p,y) = f(D(p,y), y)$

4) $KS(x|y) \le KS(x|\underline{g(y)})$ $\quad g$ выч. ф-ция всюду опр.

<u>Теорема</u> (Колмогоров - Левин)

$KS(x,y) = KS(x) + KS(y|x) + O(\log n)$,

если $|x|, |y| \le n$

<u>Д-во</u>

(1) $KS(x,y) \le KS(x) + KS(y|x) + O(\log n)$

(2) $KS(x,y) + O(\log n) \ge KS(x) + KS(y|x)$

(1) очевидно. D - опт. дек. $\quad D'$ - опт. усл. дек.

$D(p) = x \quad\quad x \quad\quad D'(q,x) = y$

$$D''(p,q) = (D(p), D'(q, D(p)))$$

(2) $KS(x,y)=a$

$A=\{(z,t) \mid KS(z,t)\le a\}$

$|A|\le 2^{a+1}$

$A_t=\{u \mid (t,u)\in A\}$

$\sum_t |A_t| = |A| \le 2^{a+1}$

$2^m \le |A_x| < 2^{m+1}$

(а) $KS(x)\le a-m+O(\log n)$

(б) $KS(y|x)\le m+O(\log n)$

(б) $KS(y|x)\le m+O(\log n)$

$A_x=\{(x,t) \mid KS(x,t)\le a\}$

y можно задать номером в A_x

$m+O(1)$ битов на этот номер.

A_x можно перечислить при известном x

y задаем номером.

$|m|, |a|\le \log n$

$m, a,$

(а) $KS(x)\le a-m+O(\log n)$

$B=\{t \mid |A_t|\geqslant 2^m\}$

$|B|\le 2^{a+1}/2^m$

$|A_x|\geqslant 2^m \Longrightarrow x\in B$

Покажем, что B можно перечислить

$\Longrightarrow$ x можно задать номером в B. На это хватит $a-m+O(1)$ битов.

a, m $O(\log n)$ битов.

$$H(x,y) = H(x) + H(y|x)$$

---

§ Префиксная сложность и априорная вероятность.

<u>Опр.</u> $p_0, p_1, \ldots$ — пос-ть вещественных чисел. Эта посл-ть перечислима снизу, если $\exists$ вычислимая посл-ть рац. чисел $p(i,j) \in \mathbb{Q}$: $p(i,0) \le p(i,1) \le p(i,2) \le \ldots$ —

$$p_i = \lim_{j\to\infty} p(i,j)$$

<u>Утв.</u> $p_0, p_1, \ldots$ перечислимые снизу $\Leftrightarrow$ $\{(r,i) \mid r < p_i\}$ перечислимо.

<u>Д-во</u> $(\Rightarrow)$ полуразр. алг.! $p(i,0), p(i,1), \ldots$ пока не найдем k: $p(i,k) > r$. Выдаст 1.

$(\Leftarrow)$ $p(i,j)$ — запустим перечисл. алг на j шагов и выводим пару (r,i) с макс. r, кот. встретилась. $-\infty$

Теорема
(1) M — вероятностная МТ, раб. на пустом входе, результат работы — $\mathcal{N} = \{0,1,2,\ldots\}$

$\mathcal{N} \leftrightarrow \{\underset{0}{\Lambda}, \underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{3}{00}, \underset{4}{01}, \underset{5}{10}, \underset{6}{11}, \ldots\}$

$p_i = \Pr[M = i]$. Тогда $\begin{cases} \sum p_i \le 1 \\ p_i \text{ перечисл. снизу} \end{cases}$

(2) $p_0, p_1, \ldots$ перечислима снизу и $\sum p_i \le 1$. Тогда $\exists$ вер. м.т. M!

$p_i = \Pr[M = i]$

Д-во (1)

$p(i,n) = \Pr[M = i$ за $\le n$ шагов$]$

$p(i,n) \nearrow$ $\quad p(i,n) \to p_i$

$\underbrace{\Pr[M=i]}_{p_i} = \bigcup_n \Pr[M = i$ за n шагов$]$

$= \sum \Pr[M = i$ за n шагов$]$

(2) $p(i,n) \ge 0$ $\quad p(i,n) = 0, \ i > n$

$\sum_{i=0}^{n} p(i,n)$

$[0][1] \quad [\,][\,]$

$p(i,n+1) - p(i,n)$

$\underbrace{\beta_0, \beta_1 \ldots}_{k}$ —

2^{-n}

$m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ наз-ся перечисл. снизу полумерой, если

$m(0), m(1), \ldots$ — перечисл. снизу

и $\sum_{i=0}^{\infty} m(i) \le 1$.

$m : \{0,1\}^* \to \mathbb{R}$

Опр. m, m' две полумеры, m не меньше m', если $\exists c : \forall i \in \mathbb{N} \quad m(i) \geq c\, m'(i)$

Максимальная перечисл. снизу полумера — это такая, кот. не меньше любой другой

Теорема $\exists$ максим. перечисл. снизу полумера.

Д-во 1) Случ. выберем м.т. M

2) Мы выводим ответ M.

1): $\underbrace{00000}_{i}1$ машину с номером i

m — построенная полумера

m' — другая перечисл. снизу полумера. Тогда $\exists$ м.т. M' которая задает m'.

$M' = M_{i_0}$

$\forall j \quad \Pr[M_{\text{u}} = j] \geq 2^{-i_0} \Pr_{\text{u}}[M' = j]$

$m(j) \geq 2^{-i_0}\, m'(j)$

Опр. m — максим. перечисл. снизу

по мере, то $m(x)$ — надо ся априорной вер-тью x.

$$\boxed{\text{Черный ящик}} \qquad \boxed{i}$$

$$C \cdot m'(i) \le m(x)$$

$$-\log m(x) \sim \text{колмогоровская сл-ть } x$$

Префиксная колмогоровская сл-ть

Опр. Префиксно корректный декомпрессор.

x на z стр y

$D(x)$ опр $\Rightarrow$ $D(y)$ опр и $D(y) = D(x)$

Теорема $\exists$ оптимальный префиксно-корректный декомпрессор.

Д-во $U(\hat{p}\, y) = [p](y)$

$[p](y)$

Запускаем || на всех вр $\langle p \rangle (n)$

$\langle p \rangle (n) = z \longrightarrow (n, z)$

(x', z') $\quad (x, z)$

x' — префикс x

Ждем, пока появится пара $(\hat{y}, z)$. Выводим z, где $\hat{y}$ начало y.

• Преф. корректность.

$\hat{p}_1\, y_1$ нач $\hat{p}_2\, y_2 \iff \hat{p}_1 = \hat{p}_2$

$$KP(x) = K_u(x)$$

u — оптимальный.

Опр. Декомпрессор беспрефиксный, если область его определения беспрефиксная.

Теорема $\exists$ оптимальный беспрефиксный декомпрессор.

Д-во $u(\hat{p}\, y) = [\![p]\!](y)$

$\langle p \rangle (n)$ для всех n $\quad ||$

(z, t) добавляем, только z не сравнимо со всеми предыдущими.

(y) Если выведена пара (y, z), то выдать z.

$KP'(x) = K_{U'}(x)$

U' – оптим. беспр. декомпрессор

Теорема $-\log m(x) \overset{(1)}{\leq} KP(x) \overset{(2)}{\leq} KP'(x) \overset{(3)}{\leq} -\log m(x)$

все нер-ва с точностью до $O(1)$

Д-во (2) $KP(x) \leq KP'(x) + O(1)$

Пусть D – оптим. беспр. декомпрессор.

Построим префиксно-корректный D'

$D'(p)$: $p = p_1 \ldots p_3$

Параллельно запускаем $D(\Lambda)$
$D(p_0)$ $D(p_1 p_2) \ldots D(p)$

---

(1) $-\log m(x) \leq KP(x) + O(1)$

$2^{-KP(x)} \leq C \cdot m(x)$

Достаточно построить одну полу-меру : $\geq 2^{-KP(x)}$

D – оптим. префиксно-корректный декомпрессор. $b_0 b_1 b_2 \ldots$

$D(\Lambda)$
$D(b_0)$
$D(b_0 b_1)$

Как только $D(p) = x$, то мы ост. и выводим x.

$\Pr[M = x] \geq 2^{-KP(x)}$

$$K P'(x) \leq -\log m(x) + O(1)$$