

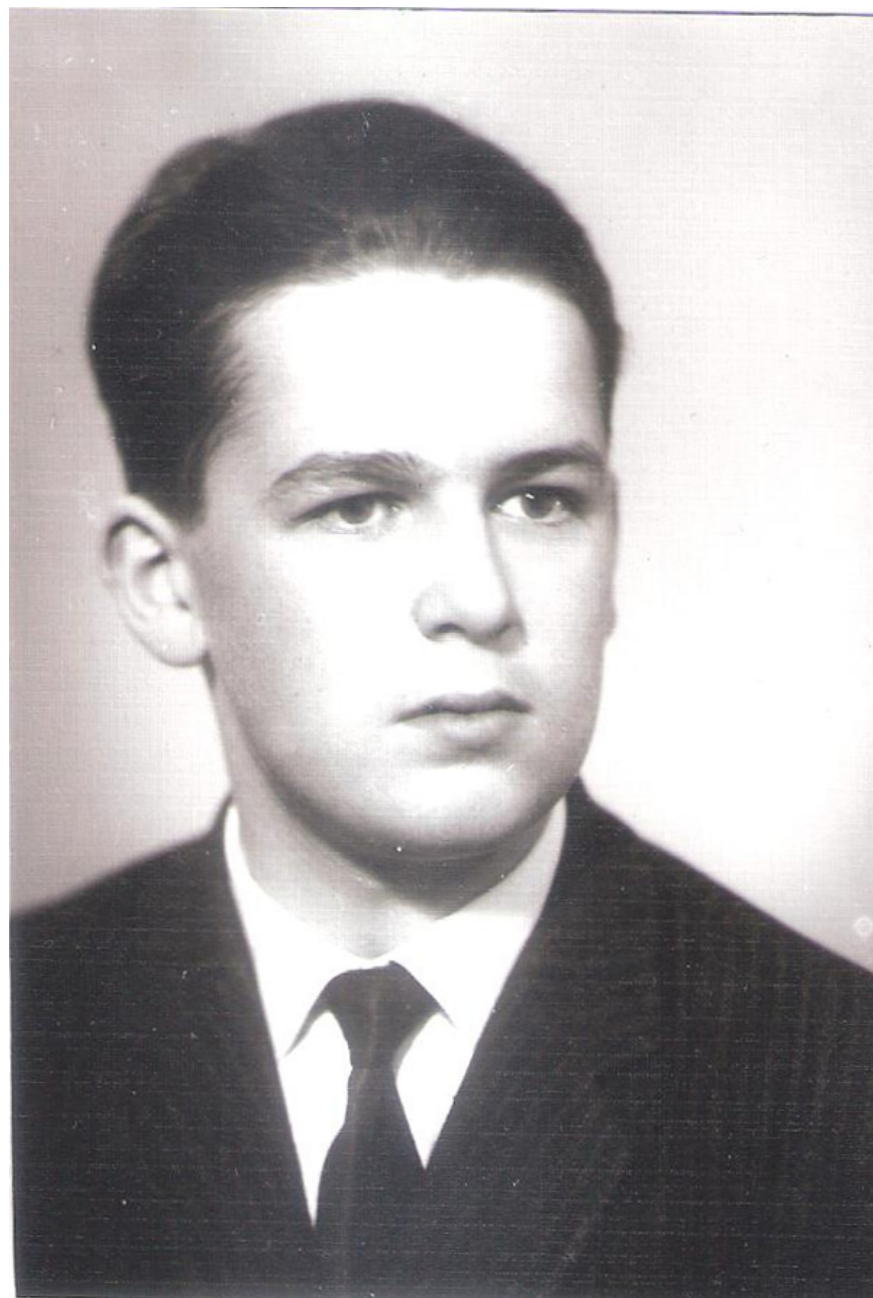
Some new results on spectral equivalence of Gaussian random functions

Alexander I. Nazarov

(PDMI RAS and St.-Petersburg State University)

St. Petersburg, 31 Aug 2021

Yakov Nikitin memorial session













Так и еду я к вам в этих грустных санях
Что бы вас попросить, чтоб вам было несложно?
Я хочу, чтобы вы не забыли меня,
Если это, конечно, в природе возможно...

Воспоминания о Якове Юрьевиче Никитине



Дорогие коллеги!

Мы собираем воспоминания о Якове Юрьевиче Никитине, ушедшем из жизни в июне 2020 года, рассчитывая издать их в виде электронного сборника, а в дальнейшем, возможно, и в виде книги.

В цели проекта не входит ни написание биографии Якова Юрьевича, ни полное описание его достижений в науке. Мы хотим собрать личные впечатления людей, знавших Я. Ю. в различные периоды его жизни.

Проект продолжает пополняться. Если вы хотите поделиться своими воспоминаниями и принять участие в проекте, вы можете написать по адресу zap1979@gmail.com или nazarov@pdmi.ras.ru.

Кроме того, если Вы располагаете не общеизвестными фотографиями Я. Ю., то просим сообщить нам об этом.

Д. Н. Запорожец и А. И. Назаров, координаторы проекта

- С. М. Абрамович
- С. М. Ананьевский
- А. В. Булинский
- А. М. Вершик
- В. В. Высоцкий
- Н. В. Грибкова
- В. А. Егоров
- А. Ю. Зайцев
- С. Е. Злотин
- И. А. Ибрагимов
- И. И. Иринчеева
- А. М. Каган
- М. Л. Качанов
- Л. Б. Клебанов

- И. Коновалова-Reaucelle
- Л. Копылев
- А. В. Ласунский
- М. А. Лифшиц
- А. А. Лодкин
- Н. А. Макеева
- А. А. Могульский
- Т. И. Мысляева
- Л. Н. Невзорова, В. Б. Невзоров
- Н. Ю. Никитина
- Т. П. Никитина
- Н. В. Петрова (Мосина)
- Ю. П. Петрова
- С. Ю. Пилюгин

- Е. В. Поникаров
- М. И. Ревяков
- Н. В. Смородина
- Н. А. Степанова
- А. Н. Тихомиров
- А. Л. Фрадков
- А. А. Хартов
- Н. А. Широков
- L. Beghin
- E. Hashorva
- N. Henze
- B. Milošević
- E. Orsingher
- B. Roy

<http://www.mathsoc.spb.ru/pers/nikitin/memory/index.html>

Some new results on spectral equivalence of Gaussian random functions

Alexander I. Nazarov

(PDMI RAS and St.-Petersburg State University)

St. Petersburg, 31 Aug 2021

Yakov Nikitin memorial session

Some new results on spectral equivalence of Gaussian random functions

Alexander I. Nazarov

(PDMI RAS and St.-Petersburg State University)

joint work with Ya.Yu. Nikitin

St. Petersburg, 31 Aug 2021

Yakov Nikitin memorial session

1. <https://arxiv.org/abs/2005.05771>. 15p. To appear in Bernoulli.
2. Stat. Prob. Lett., **170** (2021), DOI 10.1016/j.spl.2020.109013.

Let $\mathfrak{X}$ be a Hilbert space, and let $X \in \mathfrak{X}$ be a zero-mean Gaussian random vector. Then, by the Karhunen-Loève expansion, we have the distributional equality

$$\|X\|_{\mathfrak{X}}^2 \stackrel{d}{=} \sum_1^{\infty} \lambda_k \xi_k^2,$$

where ξ_k , $k \in \mathbb{N}$, are independent standard Gaussian r.v.s while $\lambda_k > 0$ are the eigenvalues of the **covariance operator**

$$\mathcal{G}_X f := \mathbf{E}(f, X)_{\mathfrak{X}} X = \lambda f.$$

Note that we require $\sum_1^{\infty} \lambda_k < \infty$, otherwise $\|X\|_{\mathfrak{X}} = \infty$ a.s.

In fact,

$$\|X^1\|_{\mathfrak{X}}^2 \stackrel{d}{=} \|X^2\|_{\mathfrak{X}}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_k^1 = \lambda_k^2 \quad \forall k \quad (\text{if } \lambda_k \neq 0).$$

So, to prove the identity in law for L_2 -norms of two Gaussian r.f., it suffices to verify the coincidence of spectra for their covariance operators (excluding zero). In this case we call two Gaussian r.f. $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Y}$ *spectrally equivalent* and write $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$.

The following spectral equivalence is well known, see, e.g., Donati-Martin and Yor (1991):

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Generalization for $d = 2$, Deheuvels, Peccati and Yor (2006):

$$\mathbf{W}(t_1, t_2) - \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{W}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \sim \mathbf{B}(t_1, t_2) := \mathbf{W}(t_1, t_2) - \mathbf{W}(1, 1)t_1 t_2.$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{\ell=1}^d \left(1 - \max\{x_\ell, y_\ell\}\right) - 2^{-d} \prod_{\ell=1}^d (1 - x_\ell^2) - 2^{-d} \prod_{\ell=1}^d (1 - y_\ell^2) + 3^{-d}$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int_{\mathcal{I}^d} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{I}^d} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{I}^{2d}} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y},$$

$$\mathcal{K}_1(1 - \mathbf{x}, 1 - \mathbf{y}) = \prod_{\ell=1}^d \min\{x_\ell, y_\ell\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{W}(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{\mathbf{W}}(1 - \mathbf{x}) = \mathbf{W}(1 - \mathbf{x}) - \int_{\mathcal{I}^d} \mathbf{W}(1 - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{\ell=1}^d \min\{x_\ell, y_\ell\} - \prod_{\ell=1}^d x_\ell y_\ell \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}(1) \prod_{\ell=1}^d x_\ell.$$

$$\overline{\mathbf{W}}(1 - \mathbf{x}) \underset{\sim}{\text{evidently}} \overline{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) \text{ for any } d? \quad \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}}u = \lambda u$$

$$\mathcal{G}_B u = \lambda u$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$u_k = \cos(\pi kt);$$

$$u_k = \sin(\pi kt).$$

$$(\lambda_0 = 0, \ u_0 \equiv 1)$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}}u = \lambda u$$

$$\mathcal{G}_B u = \lambda u$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$u_k = \cos(\pi kt);$$

$$\overset{D_t}{\longleftrightarrow}$$

$$u_k = \sin(\pi kt).$$

$$(\lambda_0 = 0, \ u_0 \equiv 1)$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}}u = \lambda u$$

$$\mathcal{G}_B u = \lambda u$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases};$$

$$\overset{D_t}{\longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$u_k = \cos(\pi kt);$$

$$\overset{D_t}{\longleftrightarrow}$$

$$u_k = \sin(\pi kt).$$

$$(\lambda_0 = 0, \ u_0 \equiv 1)$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}} u = \lambda u$$

$$\mathcal{G}_B u = \lambda u$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases};$$

$$\overset{D_t}{\longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -\lambda u'' = u, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$\lambda_k = (\pi k)^{-2};$$

$$u_k = \cos(\pi k t);$$

$$\overset{D_t}{\longleftrightarrow}$$

$$u_k = \sin(\pi k t).$$

$$(\lambda_0 = 0, u_0 \equiv 1)$$

Multidimensional case, cf. Nazarov, Stepanova (2012),
is very complicated

Multidimensional case is very complicated

Example: $d = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda u_{ttss}^{IV} = u, \\ u_{ts}''(0, s) = u_{ts}''(t, 0) = 0, ; \\ u_s'(1, s) = u_t'(t, 1) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda u_{ttss}^{IV} = u, \\ u(0, s) = u(t, 0) = 0, \\ u_{tss}'''(1, s) = u_{tts}'''(t, 1) = 0, \\ u(1, 1) = 0 \end{array} \right. .$$

МЕМОРАНДУМ О РАВЕНСТВЕ L_2 -НОРМ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Саша, я не забыл о нашем разговоре о возможном обобщении и распространении равенств норм гауссовских процессов и полей. Я немного порылся в литературе. Вот что у меня вырисовалось. Направлений я вижу два (вероятно, есть и еще).

ОБОЗНАЧЕНИЯ Черта наверху - всегда проинтегрированный процесс от 0 до t или до (t_1, t_2) , W - всегда стандартное броуновское движение или лист, W_0 - приколотый в $(1,1)$ броуновский лист, B - всегда броуновский мост, B_* - броуновская подушка,

$$B_*(s, t) = W(s, t) - sW(1, t) - tW(s, 1) + stW(1, 1),$$

$K(s, t) = W(s, t) - sW(1, t)$ - поле Кифера. В одном из примеров появляется *on-line* процесс Клепценой, который мы использовали в статье про поля в Transactions.

1) Перенос равенств по распределению L_2 -норм с двумерных полей на многомерные. Один такой перенос Вы осуществили "операторными методами" в связи со статистикой омега-квадрат. У Деовельса-Пеккати-Йорра есть 3 или 4 двумерных тождества такого рода.

Пример 1. (равенство здесь и впредь означает $\stackrel{Quad}{=}$):

$$W(s, t) - stW(1, 1) = W(s, t) - \int_0^1 \int_0^1 W(u, v) du dv. \quad \text{Вы показали, что в } R^d \text{ это сохраняется.}$$

В одномерном случае броуновский мост равен по норме центрированному Винеру, это есть даже у Бегин-Никитин-Орсингер, но, возможно, впервые доказали Донати-Мартин и Йор (1991), причем у тех было даже покруче:

2) В одномерном случае имеется несколько тождеств, в основном для проинтегрированных и центрированных процессов, которые никто не пытался обобщать даже

2

на двумерный случай. Деовельс и соавторы вообще проинтегрированными процессами не занимались. Мне кажется, это направление даже интереснее по последствиям (трудно сказать, проще ли). И тут и там надо угадать, что именно надо доказывать. Я приведу три примера с очевидными гипотезами (вероятно, неверными). Вполне возможно, что вместо приколотого моста должна появляться подушка или что-то иное.

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Let $w(t)$ be Gaussian white noise, $\mathcal{G}_w = I$. Then

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds =: (Tw)(t);$$

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds =: ((I - P)Tw)(t).$$

$$B(t) = W(t) - W(1)t?$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}} = (I - P)TT^*(I - P);$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Let $w(t)$ be Gaussian white noise, $\mathcal{G}_w = I$. Then

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds =: (Tw)(t);$$

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds =: ((I - P)Tw)(t).$$

$$B(t) = W(t) - W(1)t = \int_0^t \left(w(s) - \int_0^1 w(u) du \right) ds = (T(I - P)w)(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}} = (I - P)TT^*(I - P); \quad \mathcal{G}_B = T(I - P)(I - P)T^*.$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Let $w(t)$ be Gaussian white noise, $\mathcal{G}_w = I$. Then

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds =: (Tw)(t); \quad W(1-t) = \int_t^1 w(s) ds = (T^*w)(t).$$

$$\overline{W}(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds =: ((I - P)Tw)(t).$$

$$B(t) = W(t) - W(1)t = \int_0^t \left(w(s) - \int_0^1 w(u) du \right) ds = (T(I - P)w)(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}} = (I - P)TT^*(I - P); \quad \mathcal{G}_B = T(I - P)(I - P)T^*.$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Let $w(t)$ be Gaussian white noise, $\mathcal{G}_w = I$. Then

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds =: (Tw)(t); \quad W(1-t) = \int_t^1 w(s) ds = (T^*w)(t).$$

$$\overline{W}(1-t) = W(1-t) - \int_0^1 W(s) ds =: ((I-P)T^*w)(t).$$

$$B(t) = W(t) - W(1)t = \int_0^t \left(w(s) - \int_0^1 w(u) du \right) ds = (T(I-P)w)(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}(1-t)} = (I-P)T^*T(I-P); \quad \mathcal{G}_B = T(I-P)(I-P)T^*.$$

$$W(t) - \int_0^1 W(s) ds \sim B(t).$$

Let $w(t)$ be Gaussian white noise, $\mathcal{G}_w = I$. Then

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds =: (Tw)(t); \quad W(1-t) = \int_t^1 w(s) ds = (T^*w)(t).$$

$$\overline{W}(1-t) = W(1-t) - \int_0^1 W(s) ds =: ((I-P)T^*w)(t).$$

$$B(t) = W(t) - W(1)t = \int_0^t \left(w(s) - \int_0^1 w(u) du \right) ds = (T(I-P)w)(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{W}(1-t)} = (I-P)T^*T(I-P); \quad \mathcal{G}_B = T(I-P)(I-P)T^*.$$

In d -dim:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) - \int_{\mathcal{I}^d} \mathbf{W}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \sim \mathbf{B}(\mathbf{x}).$$

Let $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ be d -dim Gaussian white noise, $\mathcal{G}_{\mathbf{w}} = \mathbf{I}$. Then

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \bigotimes_{k=1}^d T_k \mathbf{w}(\mathbf{x}) =: \mathbf{T} \mathbf{w}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{W}(1 - \mathbf{x}) = \bigotimes_{k=1}^d T_k^* \mathbf{w}(\mathbf{x}) =: \mathbf{T}^* \mathbf{w}(\mathbf{x}).$$

$$\overline{\mathbf{W}}(1 - \mathbf{x}) = \mathbf{W}(1 - \mathbf{x}) - \int_{\mathcal{I}^d} \mathbf{W}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} =: ((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^* \mathbf{w})(\mathbf{x}).$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}(1) \prod_{\ell=1}^d x_{\ell} = (\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{w})(\mathbf{x}).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{W}}(1-\mathbf{x})} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P}); \quad \mathcal{G}_{\mathbf{B}} = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*.$$

Stochastic integral:

$$\mathfrak{F}_W(t) := \int_0^t f(s) dW(s), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad f \in L_2(0, 1).$$

$$\overline{\mathfrak{F}_W(t)} \sim f(1-t)B(t) \left(\sim f(t)B(t) \right).$$

$$\mathfrak{F}_W(t) = TM_f w(t); \quad \overline{\mathfrak{F}_W(t)} = (I - P)TM_f w(t).$$

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathfrak{F}_W}} = (I - P)TM_f M_f T^*(I - P);$$

$$\mathcal{G}_{fB} = M_f T^*(I - P)(I - P)TM_f.$$

In d -dim:

$$\mathfrak{F}_W(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_d} f(\mathbf{y}) d\mathbf{W}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{I}^d.$$

$$\overline{\mathfrak{F}_W(\mathbf{x})} \sim f(1-\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \left(\not\sim f(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right).$$

The Riemann–Liouville process:

$$R_\alpha(t) := \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dW(s), \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

We also define the Riemann–Liouville bridge $R_\alpha^\circ(t)$ and the generalized centered Riemann–Liouville process $R_\alpha^\bullet(t)$:

$$R_\alpha^\circ(t) := R_\alpha(t) - t^\alpha R_\alpha(1); \quad R_\alpha^\bullet(t) := R_\alpha(t) - \alpha t^{\alpha-1} \int_0^1 R_\alpha(s) ds.$$

$$R_\alpha^\circ(t) \sim R_\alpha^\bullet(t).$$

$$(T_\alpha u)(t) = \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds; \quad (P_\alpha u)(t) = \alpha \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

$$\mathcal{G}_{R_\alpha^\circ} = T_\alpha(I - P_\alpha)(I - P_\alpha^*)T_\alpha^* = T_\alpha(I - P_\alpha)S(I - SP_\alpha^*)T_\alpha S;$$

$$\mathcal{G}_{R_\alpha^\bullet} = (I - SP_\alpha^*)T_\alpha T_\alpha^*(I - P_\alpha S) = (I - SP_\alpha^*)T_\alpha ST_\alpha(I - P_\alpha)S.$$

Integrated fields:

$$\mathbf{X}^{[0]}(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_d} \mathbf{X}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{and} \quad \mathbf{X}^{[1]}(\mathbf{x}) = \int_{x_1}^1 \cdots \int_{x_d}^1 \mathbf{X}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{B}^{[0]}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{[0]}(\mathbf{x})}; \quad \mathbf{B}^{[1]}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{[1]}(\mathbf{x})}$$

(for $d = 1$, Beghin, Nikitin and Orsingher (2005)).

Since $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}$ and $\mathbf{S}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{S} = \mathbf{P}$, we have

$$\mathcal{G}_{\mathbf{B}^{[0]}} = \mathbf{T}^2(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^{*2} = \mathbf{T}^2(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{S}\mathbf{T}^2\mathbf{S} = \mathbf{T}^2\mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^2\mathbf{S};$$

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{W}^{[0]}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^2\mathbf{T}^{*2}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^2\mathbf{S}\mathbf{T}^2\mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{P}).$$

n -times integrated fields:

$$\mathbf{B}^{[0^n]}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{[0^n]}(\mathbf{x})}.$$

Integrated-centered field:

$$\mathbf{X}^{\{0\}}(\mathbf{x}) = (\overline{\mathbf{X}})^{[0]}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{X}^{\{1\}}(\mathbf{x}) = (\overline{\mathbf{X}})^{[1]}(\mathbf{x}).$$

$$\mathbf{B}^{\{0\}}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{\{0\}}(\mathbf{x})}; \quad \mathbf{B}^{\{1\}}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{\{1\}}(\mathbf{x})}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{B}^{\{0\}}} &= \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^* \\ &= \left(\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\right)^2 \left((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}\right)^2 = \left(\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\right)^2 \mathbf{S} \left((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}\right)^2 \mathbf{S}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{W}^{\{0\}}}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}\mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \\ &= \left((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}\right)^2 \left(\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\right)^2 = \left((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}\right)^2 \mathbf{S} \left(\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\right)^2 \mathbf{S}, \end{aligned}$$

n -times integrated-centered fields:

$$\mathbf{B}^{\{0^n\}}(\mathbf{x}) \sim \overline{\mathbf{W}^{\{0^n\}}(\mathbf{x})}$$

(for $d = 1$, Nazarov (2009)).

$$\overline{\mathbf{B}^{[1]}(\mathbf{x})} \sim \mathbf{W}^{\{1\}}(\mathbf{x})$$

For $d = 1$, also $\overline{B^{[0]}} \sim W^{\{0\}}$ (Beghin, Nikitin and Orsingher (2005)).
For $d > 1$, this relation does not hold.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{B}^{[1]}}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{STST}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{STST}(\mathbf{I} - \mathbf{P}); \\ \mathcal{G}_{\mathbf{W}^{\{1\}}} &= \mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T}\mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T} = \mathbf{STS}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{TSTS}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{T} \\ &= \mathbf{ST}(\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{STST}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{ST}. \end{aligned}$$

$$\overline{(\mathbf{B})^{[011]}(\mathbf{x})} \sim \overline{(\mathbf{W}^{[0]})^{[11]}(\mathbf{x})},$$

etc.

Detrended processes of high order:

$$X_{\langle n \rangle}(t) = X(t) - \sum_{j=0}^n a_j t^j,$$

where a_j are defined by the relations

$$\int_0^1 X_{\langle n \rangle}(t) t^j dt = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

Conditional (“bridged”) n -times integrated Wiener process, Lachal (2002):

$$\mathbb{B}_n(t) = \left(W^{[0^n]}(t) \mid W^{[0^m]}(1) = 0, \quad m = 0, \dots, n \right).$$

$$(W^{[0^n]})_{\langle n \rangle}(t) \sim \mathbb{B}_n(t).$$

(in implicit form, Yu. Petrova (2017))

Online-centered processes:

$$\widehat{X}(t) = X(t) - \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds \equiv (I - \mathcal{T}^{-1}T)X(t) =: (\widehat{\mathbb{T}}X)(t).$$

Kleptsyna and Le Breton (2002), Karol', Nazarov and Nikitin (2008):

$$\widehat{W}(t) \sim \overline{W}(t).$$

Lemma: $\widehat{\mathbb{T}}^* \widehat{\mathbb{T}} = I - P; \quad \widehat{\mathbb{T}} \widehat{\mathbb{T}}^* = I.$

$$\widehat{\mathbb{T}}^* \widehat{\mathbb{T}} = (I - T^* \mathcal{T}^{-1})(I - \mathcal{T}^{-1}T);$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbb{T}}^* \widehat{\mathbb{T}} u)(t) &= u(t) - \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds - \int_t^1 \frac{u(s)}{s} ds + \int_t^1 \frac{1}{s^2} \int_0^s u(\tau) d\tau ds \\ &= u(t) - \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds - \left(\frac{1}{s} \int_0^s u(\tau) d\tau \right) \Big|_t^1 = u(t) - \int_0^1 u(s) ds. \end{aligned}$$

$\mathcal{X}$ is a zero mean Gaussian process $\implies \hat{\mathcal{X}}(t) \sim \overline{\mathcal{X}}(t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{X}}} &= \hat{\mathbb{T}} \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \hat{\mathbb{T}}^* \sim \mathcal{G}_{\mathcal{X}} \hat{\mathbb{T}}^* \hat{\mathbb{T}} \stackrel{\bullet}{=} \mathcal{G}_{\mathcal{X}}(I - P) \\ &= \mathcal{G}_{\mathcal{X}}(I - P)(I - P) \sim (I - P)\mathcal{G}_{\mathcal{X}}(I - P) = \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{X}}} \end{aligned}$$

(the equality $(\bullet)$ follows from **Lemma**).

Question: Let $\mathcal{X}$ be a Green Gaussian process. Is $\hat{\mathcal{X}}$ GGp?

$\hat{W}(t)$ – yes; $\hat{B}(t)$ – no.

Answer: $\mathcal{X}$ is a GGp $\implies \hat{\mathcal{X}}^{[0]}$ is a GGp.

Since $\widehat{\mathcal{X}}(t) \sim \overline{\mathcal{X}}(t)$, we have

$$\|\widehat{\mathcal{X}}\|_{L_2(0,1)}^2 \stackrel{d}{=} \|\overline{\mathcal{X}}\|_{L_2(0,1)}^2.$$

However, we provide a much stronger statement.

Let $\mathcal{X}(t)$ be **arbitrary random process** on $[0, 1]$, square integrable a.s.
Then

$$\|\widehat{\mathcal{X}}\|_{L_2(0,1)}^2 = \|\overline{\mathcal{X}}\|_{L_2(0,1)}^2 \quad \text{a.s.}$$

Using **Lemma** we derive

$$\begin{aligned} \int_0^1 \widehat{\mathcal{X}}^2(t) dt &= \int_0^1 (\widehat{\mathbb{T}}\mathcal{X})^2(t) dt = \int_0^1 (\widehat{\mathbb{T}}^*\widehat{\mathbb{T}}\mathcal{X})(t) \cdot \mathcal{X}(t) dt \\ &= \int_0^1 ((I - P)\mathcal{X})(t) \cdot \mathcal{X}(t) dt = \int_0^1 ((I - P)\mathcal{X})^2(t) dt = \int_0^1 \overline{\mathcal{X}}^2(t) dt. \end{aligned}$$